T O P O L O G I A

WPPT I, sem. letni
LISTA 5

Wrocław, 30 marca 2010

ZADANIE 1. Sprawdź, że ośrodkowość jest własnością topologiczną.

ZADANIE 2. Udowodnij, że każda podprzestrzeń przestrzeni ośrodkowej jest ośrodkowa.

ZADANIE 3. Rozważmy przestrzeń ciągów o wartościach w $[0,1]$:

$$[0,1]^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \forall_n \ x_n \in [0,1]\}.$$

W przestrzeni tej wprowadzamy metrykę

$$d((x_n),(y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|x_n - y_n|.$$

Sprawdź, że jest to metryka. Ta przestrzeń nazywa się *kostką Hilberta*. Udowodnij, że kostka Hilberta jest zupełna i ośrodkowa.

ZADANIE 4. Tą samą przestrzeń można wyposażyć w metrykę supremum

$$d((x_n),(y_n)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

Czy teraz jest to przestrzeń zupełna? Czy jest ona ośrodkowa?

ZADANIE 5. Zbiór funkcji ciągłych na $[0,1]$ z metryką "całka modułu różnicy" jest przestrzenią metryczną. Czy jest ona zupełna? Czy jest ośrodkowa?

ZADANIE 6. Udowodnij, że jeśli F jest zbiorem gęstym w (X,d) a E jest zbiorem gęstym w (Y,e), obie przestrzenie są zupełne i istnieje surjektywna izometria $f : F \to E$, to (X,d) i (Y,e) są izometryczne.

ZADANIE 7. Udowodnij, że dowolny podzbiór otwarty przestrzeni polskiej jest (traktowany jako podprzestrzeń) przestrzenią polską.

Tomasz Downarowicz